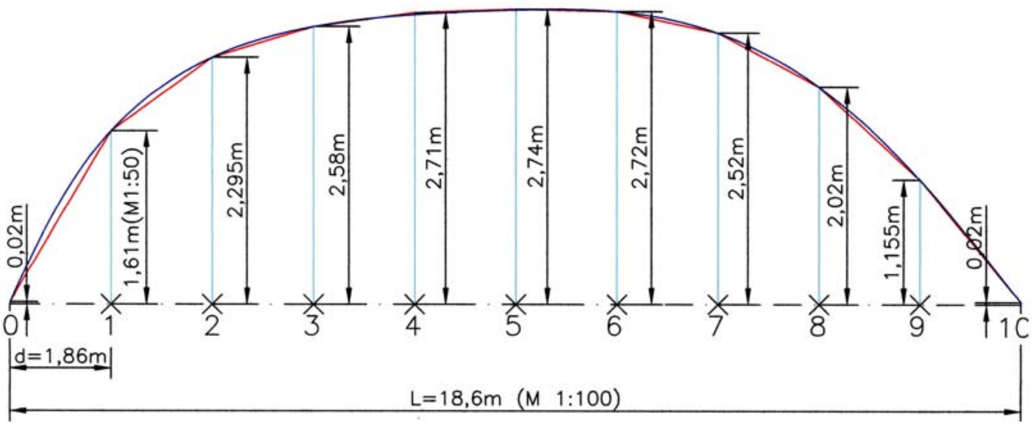
Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

2. Berechnung krummlinig begrenzter Flächen

2.1 Trapezregel

Die Länge der krummlinig begrenzten Fläche wird in *n* gleiche Teile eingeteilt. Die Schnittpunkte der Aufmaße mit der Begrenzungslinie werden mit Geraden verbunden (jede Gerade ist eine Sehne unter der Kurve). Die Fläche unter der Kurve kann nun näherungsweise als die Summe der n Trapezflächen, die alle die gleiche Höhe (Abstand der parallelen – hier: $d = \frac{L}{n}$) haben, berechnet werden:



$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{n} A_i \\
&= A_{1\_Trapez} + A_{2\_Trapez} + \ldots + A_{n-1\_Trapez} + A_{n\_Trapez} \\
&= \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot d + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot d + \ldots + \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2} \cdot d + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot d \\
&= \frac{d}{2} \cdot \left(y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n \right) \\
&= \frac{d}{2} \cdot \left(y_0 + 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \ldots + 2 \cdot y_{n-2} + 2 \cdot y_{n-1} + y_n \right) \\
A &= d \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)
\end{aligned}
$$

Übung/en:

1. Berechnen Sie die Fläche (s. Abbildung oben) mit Hilfe der Trapezregel. Entwickeln Sie für die Lösung ein Excel-Programm.

2. Bestätigen Sie, dass Dreiecke, Rechtecke und Quadrate Sonderformen einer Trapezfläche sind.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Übung 1: Berechnung der Fläche mit Excel:

Flächenberechnung:
Näherungsformeln zur Berechnung krummlinig begrenzter Fläche
- Numerische Integration

Länge L	18,600	m
eilflächen n	10	
Teilung d	1,860	m

i	y(i) m	Faktor f	y(i) x f m	
0	0,020	0,5	0,0100	
1	1,610	1	1,6100	
2	2,295	1	2,2950	
3	2,580	1	2,5800	
4	2,710	1	2,7100	
5	2,740	1	2,7400	
6	2,720	1	2,7200	
7	2,520	1	2,5200	
8	2,020	1	2,0200	
9	1,155	1	1,1550	
10	0,020	0,5	0,0100	
		Summe	20,3700	
		Fläche	**37,8882**	m²
		2 * Fläche	75,7764	m²

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

2.2 Simpsonregel[1]

2.2.1 Herleitung: Die Simpson-Formel zur numerischen Integration

(vgl. auch Anhang 2)

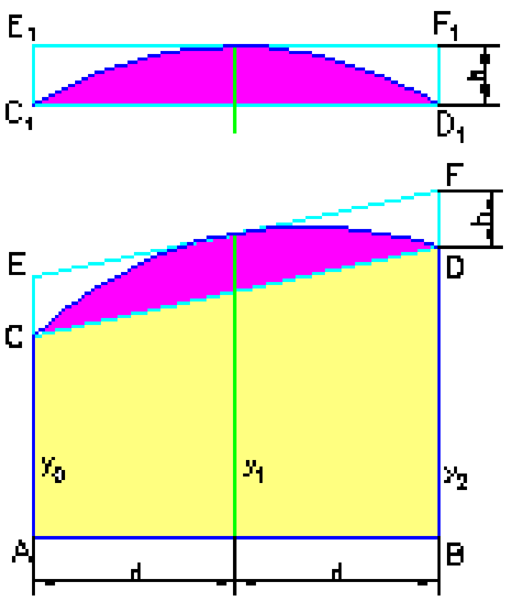


Bild 1: Kurvenabschnitt

Die krummlinig begrenzte Fläche ABDC wird in zwei Streifen gleicher Breite d eingeteilt. Die Gesamtfläche kann zerlegt in eine Trapezfläche ABDC und ein Parabelsegment CD.

Der Inhalt des Parabelsegments CD ist gleich 2/3 der Fläche des umschriebenden Parallelogramms CDFE bzw. des Rechtecks $C_1D_1F_1E_1$ – u. zw. mathematisch genau (vgl. Anhang 1).

Nun ist die Kurvenfläche

$$A = A_{Trapez} + A_{Parabelsegment}$$

und

$$h = y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{y_0 + y_2}{2} \cdot 2d + \frac{2}{3} \cdot 2d \cdot h \\
&= d \cdot (y_0 + y_2) + \frac{4}{3} \cdot d \cdot \left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2} \right) \\
&= d \cdot \left(y_0 + y_2 + \frac{4}{3} \cdot y_1 - \frac{2}{3} \cdot y_0 - \frac{2}{3} \cdot y_2 \right) \\
&= \frac{d}{3} \cdot (3 \cdot y_0 + 3 \cdot y_2 + 4 \cdot y_1 - 2 \cdot y_0 - 2 \cdot y_2) \\
A &= \frac{d}{3} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2)
\end{aligned}$$

[1] Siehe auch: http://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonsche_Formel

Uwe Rath
Ecklеinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

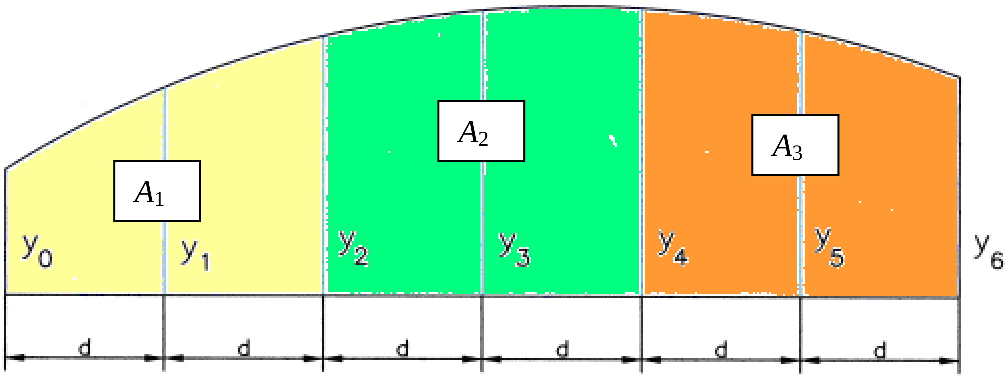


Bild 2: Flächenteilung einer krummlinig begrenzten Fläche

Für die krummlinig begrenzte Fläche Bild 2 ergibt sich folgende Rechnung:

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 + A_3 \\
&= \frac{d}{3}\cdot(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{d}{3}\cdot(y_2 + 4y_3 + y_4) + \frac{d}{3}\cdot(y_4 + 4y_5 + y_6) \\
&= \frac{d}{3}\cdot(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6) \\
&= \frac{d}{3}\cdot(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)
\end{aligned}
$$

Die Simsponregel ist eine sehr gute Näherungsformel. Auch bei starken Krümmungen (z. B. an den Kurvenenden) ergeben sich ziemlich genaue Resultate, wenn hier der Abstand der Aufmaße *d* enger gewählt wird, z. B. *d*/2.

Übung:

Berechnen Sie die krummlinig begrenzten Flächen Bild 1 und Bild 2 mit Hilfe der Trapez- und Simpsonregel. Für beide Flächen gilt M 1:1.

2.2.2 Krummlinig begrenzte Fläche mit starken Krümmungen an den Enden

Bei Kurven mit starken Krümmungen an den Enden fügt man Zwischenordinaten an. Einfach wird die Rechnung, wenn man mit 1/2-Spanten arbeitet, d. h. man wählt $d_1 = \frac{d}{2}$.

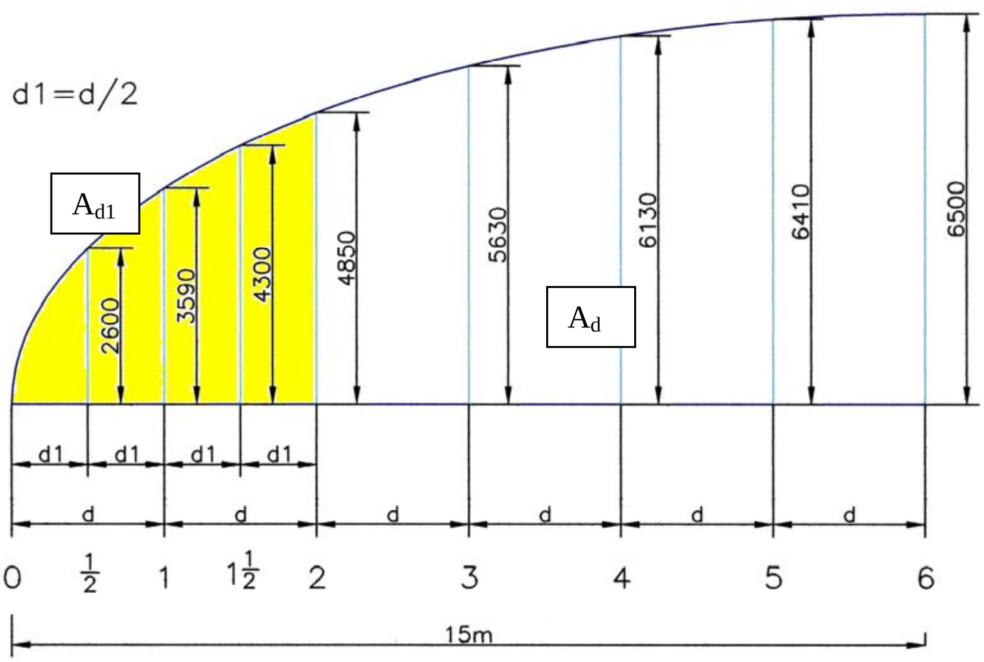


Bild 3: Krummlinig begrenzte Fläche mit starken Krümmungen an einem Ende

Es ergibt sich folgende Rechnung:

$$A = A_{d1} + A_d$$

$$= \frac{d_1}{3} \cdot \left(y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + 2y_1 + 4y_{1\frac{1}{2}} + y_2 \right) + \frac{d}{3} \cdot \left(y_2 + 4y_3 + 2_4 + 4y_5 + y_6 \right)$$

$$= \frac{\frac{d}{2}}{3} \cdot \left(y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + 2y_1 + 4y_{1\frac{1}{2}} + y_2 \right) + \frac{d}{3} \cdot \left(y_2 + 4y_3 + 2_4 + 4y_5 + y_6 \right)$$

$$= \frac{d}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + 2y_1 + 4y_{1\frac{1}{2}} + y_2 \right) + \frac{d}{3} \cdot \left(y_2 + 4y_3 + 2_4 + 4y_5 + y_6 \right)$$

$$= \frac{d}{3} \cdot \left(\frac{y_0}{2} + 2y_{\frac{1}{2}} + 1y_1 + 2y_{1\frac{1}{2}} + \frac{y_2}{2} + y_2 + 4y_3 + 2_4 + 4y_5 + y_6 \right)$$

$$A = \frac{d}{3} \cdot \left(\frac{y_0}{2} + 2y_{\frac{1}{2}} + 1y_1 + 2y_{1\frac{1}{2}} + 1\frac{1}{2} y_2 + 4y_3 + 2_4 + 4y_5 + y_6 \right)$$

Übung:

Berechnen Sie die krummlinig begrenzte Fläche Bild 3 (M 1 : 1) mit Hilfe der Trapez- und Simpsonregel.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

2.2.3 Krummlinig begrenzte Fläche mit Anhängseln

Schwieriger und umständlicher ist die Berechnung von anhängenden Flächen (Anhängseln), wenn d1 ein beliebiges Maß ist.

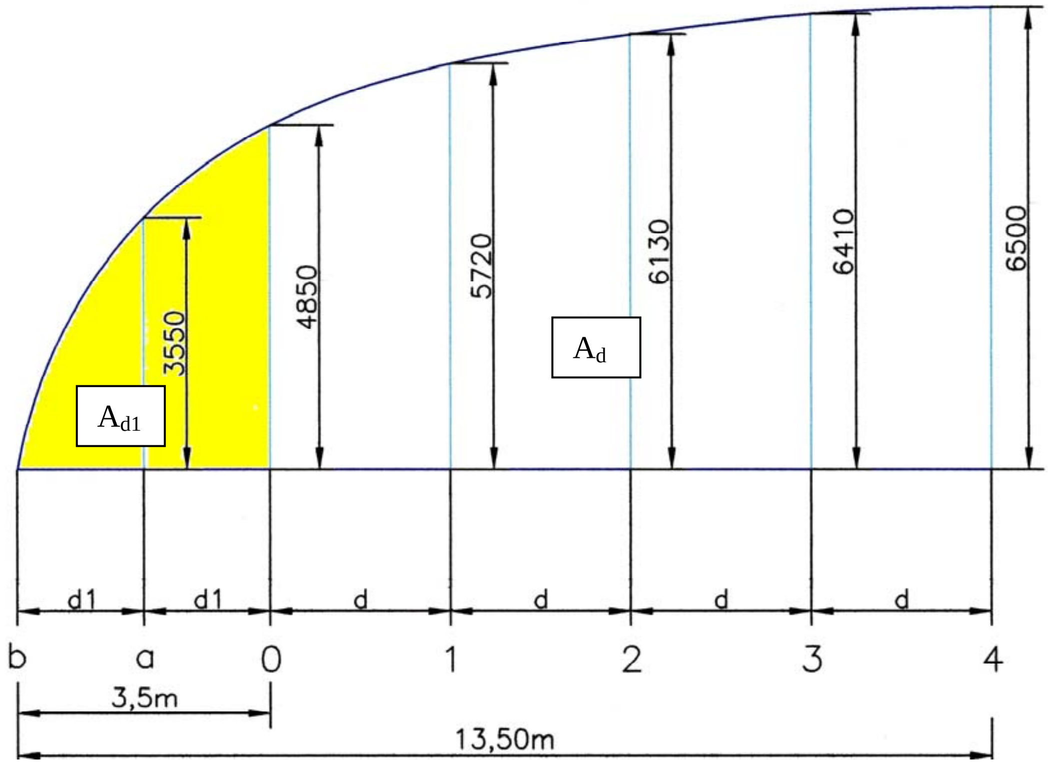


Bild 4: Krummlinig begrenzte Fläche mit Anhängseln

$$A = A_{d1} + A_d$$

$$= \frac{d_1}{3} \cdot (b + 4a + y_0) + \frac{d}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{d}{d} \cdot \frac{d_1}{3} \cdot (b + 4a + y_0) + \frac{d}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{d}{3} \cdot \frac{d_1}{d} \cdot (b + 4a + y_0) + \frac{d}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{d}{3} \cdot \left(\frac{d_1}{d} \cdot b + 4 \cdot \frac{d_1}{d} \cdot a + \frac{d_1}{d} \cdot y_0 \right) + \frac{d}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{d}{3} \cdot \left(\frac{d_1}{d} \cdot b + 4 \cdot \frac{d_1}{d} \cdot a + \frac{d_1}{d} \cdot y_0 + y_0 + 4y_1 + 2_2 + 4y_3 + y_4 \right)$$

$$A = \frac{d}{3} \cdot \left(\frac{d_1}{d} \cdot b + 4 \cdot \frac{d_1}{d} \cdot a + \left[\frac{d_1}{d} + 1 \right] \cdot y_0 + 4y_1 + 2_2 + 4y_3 + y_4 \right)$$

$$oder\ mit\ k = \frac{d_1}{d}$$

$$A = \frac{d}{3} \cdot (k \cdot b + 4 \cdot k \cdot a + [k + 1] \cdot y_0 + 4y_1 + 2_2 + 4y_3 + y_4)$$

Übung:

Berechnen Sie die krummlinig begrenzte Fläche Bild 4 (M 1 : 1) mit Hilfe der Trapez- und Simpsonregel.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Projektaufgabe 1:

Berechnen Sie die Fläche des Stromlinienruders (Bild 4):

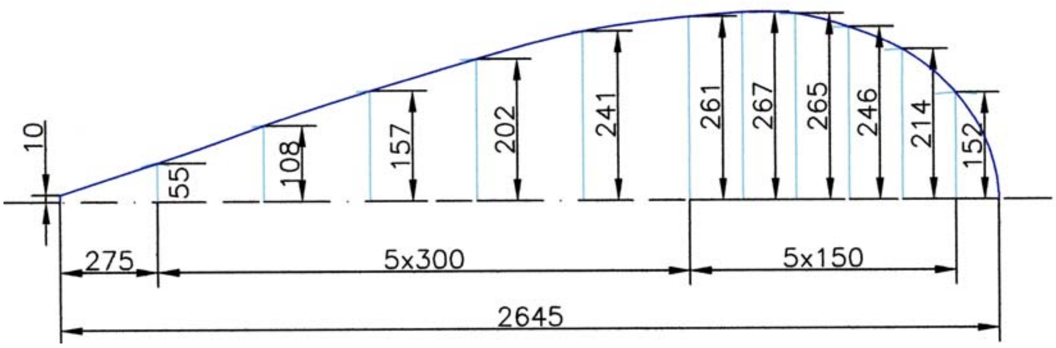


Bild 4: Bemaßungsskizze für ein Stromlinienruder

Projektaufgabe 2:

Es soll der Flächeninhalt unter der folgenden Funktion per numerischer Integration bestimmt werden, u. zw. sowohl mit der Trapezregel als auch mit der Simpsonregel.

2.1 Zeichnen Sie die Funktion.
2.2 Welches Ergebnis ist genauer?
2.3 Ist das Ergebnis eher kleiner oder größer als der tatsächliche Wert? Warum?

Folgende Stützstellen sind gegeben:

X	Y
1,5	1,225
2,5	1,581
3,5	1,871
4,5	2,121
5,5	2,345
6.5	2,550
7,5	2,739

Projektaufgabe 3

Für ein Schiff (*L* = 56,0 m) sind die folgenden Konstruktionsspantflächen in m² gegeben: Spt 0 = 0, Spt 1 = 40, Spt 2 = 54, Spt 3 = 58, Spt 4 = 60, Spt 5 = 57, Spt 6 = 52, Spt 7 = 34, Spt 8 (Vorsteven) = 0. Berechnen Sie die Verdrängung und ihren Schwerpunkt der Länge nach.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Projektaufgabe 4

Für ein Schiff von 48 m Konstr.-Länge und 4,2 m Konstr.-Tiefgang, dessen WL-Flächen durch Rechnung bekannt sind, sind die Verdrängung und der Verdrängunsschwerpunkt über OKK zu bestimmen. Ferner ist die Verdrängungskurve zu zeichnen.

WL	Fläche in m²
0	0
½	86,4
1	158,4
1½	210,2
2	244,8
3	289,4
4	319,7

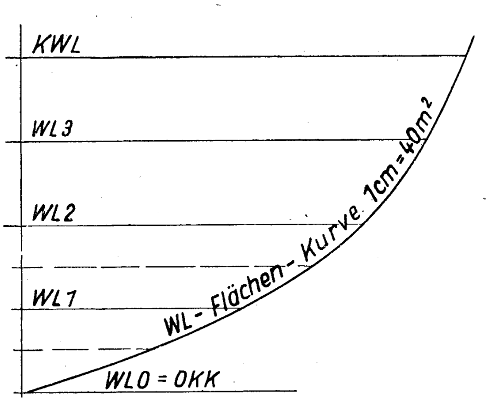


Bild: WL-Flächen-Kurve

Projektaufgabe 5

Von der Ruderfläche ist die Größe und ihr Schwerpunkt zu bestimmen.

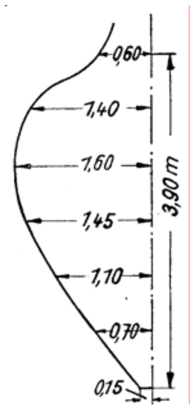
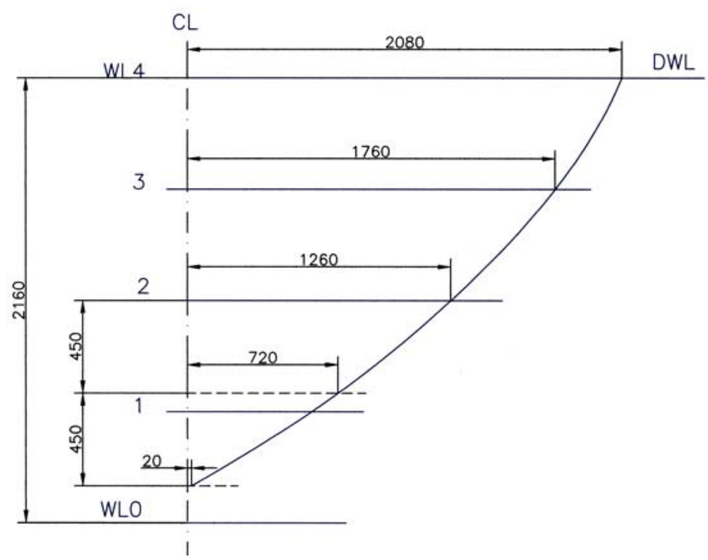


Bild: Ruderfläche

Projektaufgabe 6

Berechnen Sie die Fläche von Spt. 8 bis zur DWL für einen Fischkutter.



Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Anhang 1:

Wer war Thomas Simpson?

Thomas Simpson[2]

Thomas Simpson (* 20. August 1710 in Market Bosworth, Leicestershire; † 14. Mai 1761) war ein englischer Mathematiker. Simpson kam als Sohn eines Webers in einfachen Verhältnissen zur Welt und arbeitete anfangs selbst als Weber. Er brachte sich die Mathematik durch Selbststudium bei. Um 1725 zog er nach Nuneaton, Warwickshire, um dort bis 1733 als Mathematiklehrer zu arbeiten, wo er 1730 auch seine Frau heiratete. 1733 musste er nach Derby fliehen, nachdem er oder einer seiner Assistenten während einer Astrologiestunde ein Mädchen verängstigt hatte, indem er sich als Teufel verkleidete. Zwischen 1733 und 1736 zog er weiter nach London, wo 1736 dann seine Tochter Elizabeth und 1738 sein Sohn Thomas zur Welt kam. Seit 1743 unterrichtete er Mathematik an der Royal Military Academy in London.

Bekannt wurde er durch seine Arbeiten über Interpolation und numerische Integration. Hier ist die Simpson'sche Formel nach ihm benannt, die eigentlich in einer einfacheren Variante Johannes Kepler 200 Jahre vor ihm schon in der Kepler'schen Fassregel definiert hatte, und auch auf Erkenntnissen Newtons basiert. Die abstrakte Form des Newton-Verfahrens $x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n)$ stammt dagegen von ihm und nicht von Newton. Weiterhin befasste er sich mit Wahrscheinlichkeitstheorie und Fehlertheorie.

Simpsons publizierte 1750 das zweibändige Werk *The Doctrine and Application of Fluxions* (Die Lehre und Anwendung der Fluxionsrechnung) und wurde 1754 Herausgeber des *Ladies Diary* (Damentagebuch).

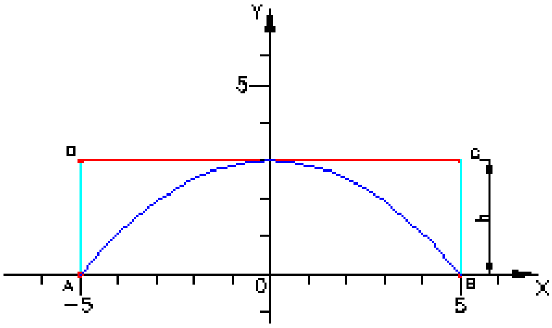
Simpson wird nachgesagt, regelmäßig an Saufgelagen mit Whisky und Gin teilgenommen zu haben. Dazu ist aber anzumerken, dass er wegen seiner familiären Herkunft nicht die Möglichkeit hatte, die Bekanntschaft von Gentlemen zu machen und besseren Alkohol zu kaufen. Andere beschrieben Simpsons Verhalten aber auch als tadellos.

[2] Bildquelle: http://www.thg.aa.bw.schule.de/Notizbuch/numint/biographien.htm

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Anhang 2: Parabelsegment

Entwickeln Sie die Formel zur Berechnung des Parabelsegments x_A <= x <= x_B.und x_A = -x_B zwischen den Nullstellen der Parabel.



Gegeben ist die Parabelfunktion

$$y = -ax^2 + h$$

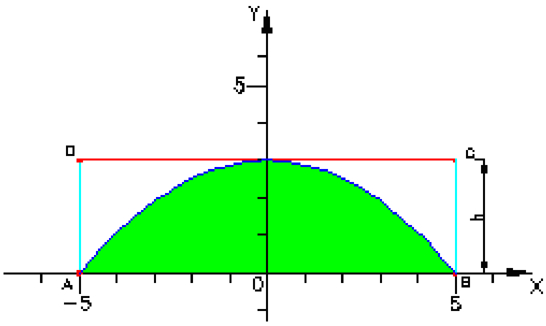
mit h = 3 und $a = \dfrac{3}{25}$

Lösungsansatz:

Zur Lösung greifen wir auf die Integralrechnung zurück: Das Integral einer reellen Funktion einer Variablen wird im zweidimensionalen Koordinatensystem als die Flächenbilanz zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse gedeutet. Für diese Fläche gilt allgemein $A = \int_{xl}^{xr} f(x)\,dx$.

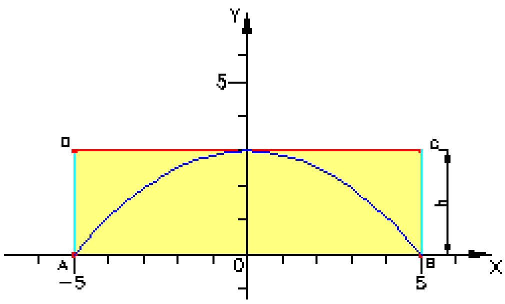
Es folgt für die Fläche des Parabelsegments

$$\begin{aligned}
A_{Parabelsegment} &= \int_{x_A}^{x_B} \left(-a\,x^2 + h\right) dx \\
&= -\frac{1}{3}a\,x_B^3 + h\,x_B + C - \left(-\frac{1}{3}a\,x_A^3 + h\,x_A + C\right) \\
&= -\frac{1}{3}a\,x_B^3 + h\,x_B + C + \frac{1}{3}a\,x_A^3 - h\,x_A - C \\
&= -\frac{1}{3}a\,x_B^3 + h\,x_B + \frac{1}{3}a\cdot(-x_B)^3 - h\cdot(-x_B) \\
&= -\frac{1}{3}\cdot a\cdot\left(-x_B^3 - x_B^3\right) + h\cdot\left(x_B + x_B\right) \\
&= -\frac{2}{3}\cdot a\cdot x_B^3 + 2\cdot h\cdot x_B = 2\cdot x_B\cdot\left(-\frac{1}{3}a\,x_B^2 + h\right)
\end{aligned}$$



und für das zugehörige Rechteck ABCD:

$$A_{Rechteck} = 2\cdot x_B\cdot h$$



Für die Fläche des Parabelsegments und der Fläche des umschreibenden Rechtecks folgt damit:

$$\begin{aligned}
\frac{A_{Parabelsegment}}{A_{umschr.Rechteck}} &= \frac{-\frac{2}{3}\cdot a\cdot x_B^3 + 2\cdot h\cdot x_B}{2\cdot h\cdot x_B} = \frac{-\frac{2}{3}\cdot a\cdot x_B^3}{2\cdot h\cdot x_B} + 1 \\
&= 1 - \frac{a\cdot x_B^2}{3\cdot h} = 1 - \frac{a\cdot x_B^2}{3\cdot a\cdot x_B^2} = 1 - \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$A_{Parabelsegment} = \frac{2}{3}\cdot A_{umschr.Rechteck}$$

Erläuterung:

Bei x = x_B ist y = 0 und daraus folgt entsprechend der Funktion für die Parabel für h:

$$\begin{aligned}
y &= -ax^2 + h \\
0 &= -ax_B^2 + h \\
h &= ax_B^2
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird in die Verhältnisgleichung übernommen.