Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Mathematematik – Koordinatensystem
Lineare Funktion

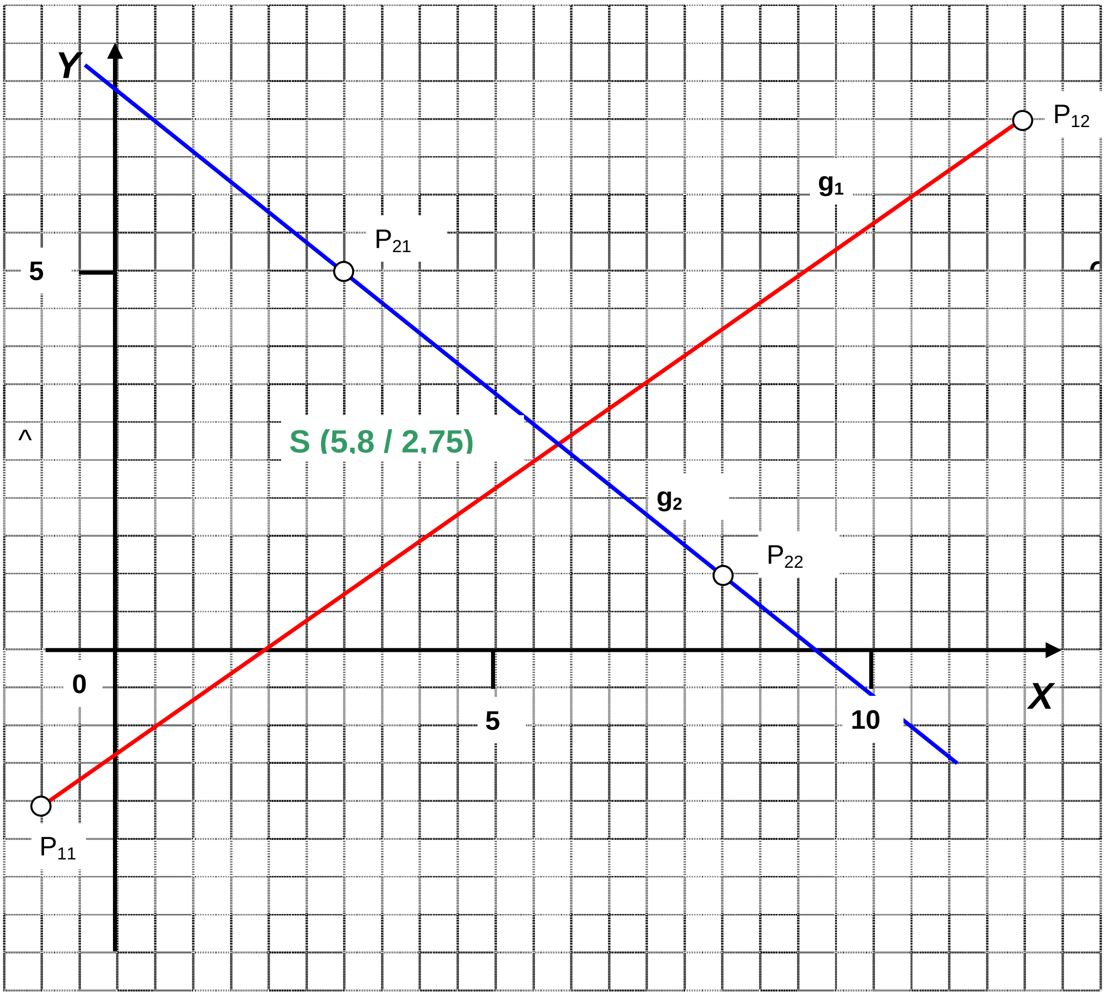
Für zwei Geraden, für die jeweils zwei Koordinatenpunkte bekannt sind, soll der Schnittpunkt bestimmt werden.

Tabelle: Koordinatenpunkte für 2 Geraden

	Punkt $P_{11}(-1 \mid -2)$		Punkt $P_{12}(12 \mid 7)$	
Gerade g_1	X_{P11}	Y_{P11}	X_{P12}	Y_{P12}
	-1	-2	12	7
	Punkt $P_{21}(3 \mid 6)$		Punkt $P_{22}(8 \mid 1)$	
Gerade g_2	X_{P21}	Y_{P21}	X_{P22}	Y_{P22}
	3	5	8	1

Aufgabe 1

Tragen Sie die Punkte in das Koordinatensystem ein und zeichnen Sie die Geraden g_1 und g_2.



Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Aufgabe 2

Markieren Sie den Schnittpunkt *S* (Kreuzungspunkt) der beiden Geraden und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an.

Aufgabe 3

Die allgemeine Funktionsgleichung für eine Gerade lautet

$$y = m\,x + b$$

mit

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Steigung der Geraden gegenüber der X-Achse

b y-Wert des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse.

Berechnen Sie die Steigung der beiden Geraden und deren Schnittpunkte mit der Y-Achse. Geben Sie die Funktionsgleichungen der beiden Geraden an.

	Gerade g_1	Gerade g_2
Steigung *m* lässt sich berechnen, wenn zwei Koordinatenpunkte der Geraden bekannt sind.	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	
	$m_1 = \frac{y_{P12} - y_{P11}}{x_{P12} - x_{P11}}$ $= \frac{7-(-2)}{12-(-1)} = \frac{7+2}{12-1}$ $= \frac{9}{13}$	$m_2 = \frac{y_{P22} - y_{P21}}{x_{P22} - x_{P21}}$ $= \frac{1-5}{8-3} = \frac{-4}{5}$ $= -\frac{4}{5}$
Achsen-abschnitt *b* lässt sich berechnen, wenn die Steigung *m* und ein Koordinatenpunkt der Geraden bekannt sind.	$y = m \cdot x + b$ $m \cdot x + b = y$ $b = y - m \cdot x$	
	$b_1 = y_{P12} - m_1 \cdot x_{P12}$ $= 7 - \frac{9}{13} \cdot 12$ $= -\frac{17}{13}$	$b_2 = y_{P22} - m_2 \cdot x_{P22}$ $= 1 - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot 8 = 1 + \frac{4}{5} \cdot 8$ $= 7\frac{2}{5}$
Funktions-gleichung	$y_1 = \frac{9}{13} \cdot x - \frac{17}{13}$	$y_2 = -\frac{4}{5} \cdot x + 7\frac{2}{5}$
	$y_1 = 0{,}69230\ldots \cdot x - 1{,}30769\ldots$	$y_2 = -0{,}8 \cdot x + 7{,}4$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.

Lösungshinweis:

Der Schnittpunkt S liegt auf beiden Geraden. Das heißt: **Einsetzen von Punkt S in die Funktiongleichungen liefert ein Gleichungssystem** (GLS):

GLS	①	$y_S = \frac{9}{13} \cdot x_S - \frac{17}{13}$
	②	$y_S = -\frac{4}{5} \cdot x_S + 7\frac{2}{5}$

Das GLS besteht aus zwei Gleichungen für zwei Unbekannte. Da auf der linken Seite jeweils der gleiche Term (y_S) steht, löst man es über das **Gleichsetzungsverfahren**:

① = ②

$$\begin{aligned}
\frac{9}{13} \cdot x_S - \frac{17}{13} &= -\frac{4}{5} \cdot x_S + 7\frac{2}{5} \\
\frac{9}{13} \cdot x_S + \frac{4}{5} \cdot x_S &= 7\frac{2}{5} + \frac{17}{13} \\
\frac{97}{65} \cdot x_S &= \frac{566}{65} \\
x_S &= \frac{566}{65} : \frac{97}{65} = \frac{566}{65} \cdot \frac{65}{97} \\
&= \frac{566}{97} = 5\frac{81}{97} = 5{,}83505\ldots
\end{aligned}$$

Einsetzen dieses Wertes x_S in eine der beiden Funktionsgleichungen ergibt den *y*-Wert für den Schnittpunkt *S* (hier gewählt ①)

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{9}{13} \cdot x_S - \frac{17}{13} \\
&= \frac{9}{13} \cdot \frac{566}{97} - \frac{17}{13} \\
&= \frac{265}{97} = 2\frac{71}{97} = 2{,}73195\ldots
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

In einer Formelsammlung zur Mathematik finden Sie für die Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden folgende Darstellung:

$$S\left(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}\,;\, m_{1(2)} \cdot \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_{1(2)}\right) \quad mit \quad m_1 \neq m_2$$

Überprüfen Sie diese Angabe!

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Lösung:

$$\begin{aligned}
m_1 \cdot x + b_1 &= m_2 \cdot x + b_2 \\
m_1 \cdot x - m_2 \cdot x &= b_2 - b_1 \\
x \cdot (m_1 - m_2) &= b_2 - b_1 \\
x_S &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_S &= m_1 \cdot x_S + b_1 \\
&= m_1 \cdot \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_1 \\
&\textit{bzw.} \\
y_S &= m_2 \cdot x_S + b_2 \\
&= m_2 \cdot \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_2
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen und/oder Schnittpunkte für die folgenden Geraden:

<table>
<tr><td>6.1</td><td colspan="2">Gegeben:
Gerade g_1: P_{11}(1 ∣ -1); P_{12}(9 ∣ 5)
Gerade g_2: P_{21}(0 ∣ 7); P_{22}(9 ∣ 0)
Gesucht:
- Funktionsgleichungen für g_1 und g_2
- Schnittpunkt S der beiden Geraden</td></tr>
<tr><td></td><td>Lösung
Gerade gg_1
$m_1 = \frac{y_{P12} - y_{P11}}{x_{P12} - x_{P11}}$
$= \frac{5-(-1)}{9-1} = \frac{5+1}{8} = \frac{6}{8}$
$= \frac{3}{4}$
$b_1 = y_{P12} - m_1 \cdot x_{P12}$
$= 5 - \frac{3}{4} \cdot 9$
$= -\frac{7}{4}$</td><td>Gerade g_2
$m_2 = \frac{y_{P22} - y_{P21}}{x_{P22} - x_{P21}}$
$= \frac{0-7}{9-0} = \frac{-7}{9}$
$= -\frac{7}{9}$
$b_2 = y_{P22} - m_2 \cdot x_{P22}$
$= 0 - \left(-\frac{7}{9}\right) \cdot 9 = 0 + 9$
$= 9$</td></tr>
</table>

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Funktionsgleichungen der beiden Geraden:

Gerade g₁ $y_1 = \frac{3}{4} \cdot x - \frac{7}{4}$

Gerade g₂ $y_2 = -\frac{7}{9} \cdot x + 9$

Schnittpunkt der beiden Geraden:

$$y_1 = y_2$$

$$\frac{3}{4} \cdot x_S - \frac{7}{4} = -\frac{7}{9} \cdot x_S + 9$$

$$\frac{3}{4} \cdot x_S + \frac{7}{9} \cdot x_S = 9 + \frac{7}{4}$$

$$\frac{55}{36} x_S = \frac{43}{4}$$

$$x_S = \frac{43}{4} \cdot \frac{36}{55} = \frac{387}{55}$$

$$\underline{= 7{,}0\overline{36}}$$

$$y_S = \frac{3}{4} \cdot x_S - \frac{7}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{387}{55} - \frac{7}{4} = \frac{194}{55}$$

$$\underline{= 3{,}5\overline{27}}$$

S (7,0364 / 3,5273

6.2 *Gegeben:*

Funktionsgleichungen

$y_1 = 3\,x + 2$

$y_2 = -3\,x + 7$

Gesucht:

- Schnittpunkt *S* der beiden Geraden

Lösung:

$$y_1 = y_2$$

$$3 \cdot x_S + 2 = -3 \cdot x_S + 7$$

$$3 \cdot x_S + 3 \cdot x_S = 7 - 2$$

$$6 \cdot x_S = 5$$

$$x_S = \frac{5}{6}$$

$$\underline{= 0{,}8\overline{3}}$$

$$y_S = 3 \cdot x_S + 2 = 3 \cdot \frac{5}{6} + 2 = \frac{9}{2}$$

$$\underline{= 4{,}5}$$

S (0,8333 / 4,5)

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

6.3 *Gegeben:*

Auf einer Probefahrt eines Schiffsneubaus wurden folgende Messwerte aufgenommen, nach dem das Schiff seine Höchstgeschwindigkeit erreicht hatte:

Fahrtstrecke *s* in sm	0	2	5	6,5	10
Fahrtzeit *t* in min	0	5,45	13,64	17,73	27,27

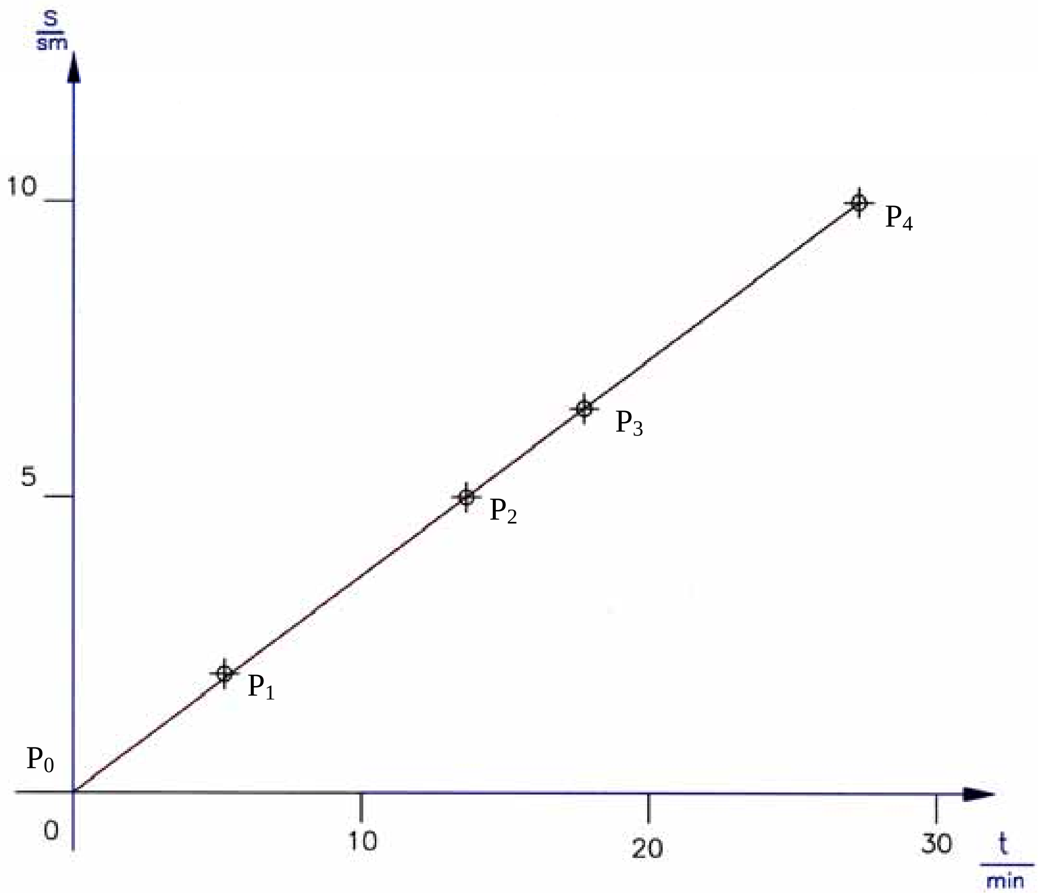
Aufgaben:

1. Stellen Sie die folgenden Messwerte grafisch in einem *s*-*t*-Diagramm dar :

Waagerechte Achse	Zeit *t* in s	10 mm ≙ 2 min
Senkrechte Achse	Strecke *s* in sm	10 mm ≙ 1 sm

2. Prüfen Sie, ob die Messwerte auf einer Geraden liegen oder im Idealfall auf einer Gerade liegen könnten.
3. Wie lautet die Funktionsgleichung für die Gerade?
4. Mit welcher Geschwindigkeit *v* in kn fuhr das Schiff?
5. Werten Sie die Daten mit Hilfe der „Linearen Regression“ aus (vgl. dazu Taschenrechner, Datenauswertung mit Excel).

6.3.1 *s*-*t*-Diagramm



Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

6.3.2

Die Punkte liegen bei einer geringen Abweichung des Punktes (5,45 min / 2 sm) sehr genau auf einer durch den Koordinatenursprung verlaufenden ansteigenden Geraden.

6.3.3

Wir übertragen die Funktionsgleichung einer Geraden $f(x) = mx + b$ auf das vorliegende Koordinatensystem. Die waagerechte *X*-Achse ist jetzt die Zeitachse (*t*-Achse) und die senkrechte -Achse die Wegachse (s-Achse). Die Steigung $m = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ wird jetzt durch den Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ersetzt. Da die vorliegende Gerade durch den Nullpunkt geht, ist b = 0.

Wir erhalten:

$$f(t) = \frac{s_4 - s_0}{t_4 - t_0} \cdot t + 0$$

$$= \frac{10\ sm - 0\ sm}{27{,}27\ \text{min} - 0\ \text{min}} \cdot t = \frac{10\ sm}{27{,}27\ \text{min}} \cdot t = 0{,}36670... \frac{sm}{\text{min}} \cdot t$$

$$\underline{\underline{\approx 0{,}3677 \frac{sm}{\text{min}} \cdot t}}$$

Statt *f(t)* wird in der Technik das Formelzeichen für den Weg *s* benutzt. Die Größe für die Steigung hat die Einheit der Geschwindigkeit und so wird statt *m* für die Steigung das Formelzeichen für die Geschwindigkeit *v* verwendet.

Für die Gerade im s-t-Diagramm ergibt sich somit

$$s = v \cdot t$$

$$= 0{,}3677 \frac{sm}{\text{min}} \cdot t$$

6.3.4

In der Seefahrt wird die Geschwindigkeit in der Regel in kn (Knoten) angegeben. Es gilt: $1kn = 1\frac{sm}{h}$.

Für unser Schiff ergibt sich nun:

$$v = 0{,}3667 \frac{sm}{\text{min}} = 0{,}3667 \frac{sm}{\frac{1}{60} h}$$

$$= 22{,}002 \frac{sm}{h}$$

$$\underline{\underline{\approx 22{,}002\ kn}}$$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

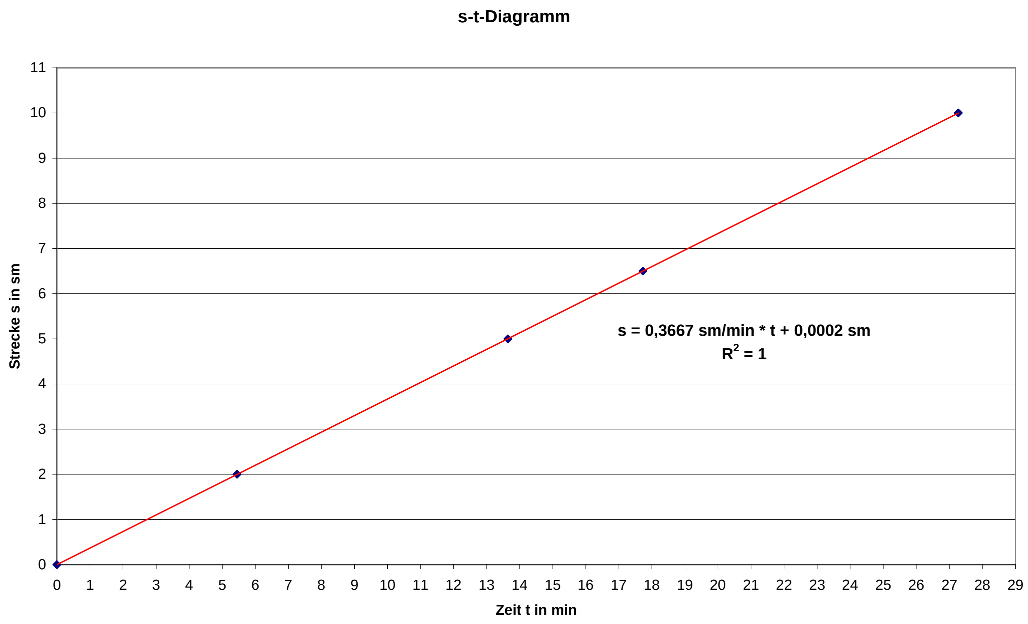
	6.3.5 Auswertung der Messwertetabelle mit Excel (Lineare Regression):

i	s sm	t min
0	0,00	0,00
1	2,00	5,45
2	5,00	13,64
3	6,50	17,73
4	10,00	27,27

Steigung	0,3667	sm/h
Achsenabschnitt	0,0002	sm

Funktiongleichung f(t): s = v · t +s0

s = 0,3667 sm/h · t + 0,0002 sm



Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de