

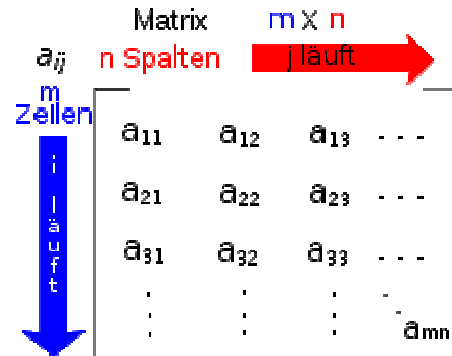
Lösen linearer Gleichungssysteme mit Hilfe der Matrizenrechnung

<http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/gleichungssysteme.htm>

In der Mathematik versteht man unter einer **Matrix** (Plural: *Matrizen*) eine rechteckige Anordnung (Tabelle) von Elementen bzw. mathematischen Objekten, mit denen man in bestimmter Weise rechnen kann (z. B. Matrix-Addition, Matrix-Multiplikation).

Die Bezeichnung „Matrix“ wurde 1850 von James Joseph Sylvester eingeführt.

Eine Anordnung, wie in nebenstehender Abbildung, von $m \cdot n$ Elementen a_{ij} erfolgt in m Zeilen und n Spalten.



<p>Aufgabe: Brückenschaltung – Lösen des Gleichungssystems</p>	<table border="1"> <tr><td>① $a - b - c = 0$</td></tr> <tr><td>② $a - d - e = 0$</td></tr> <tr><td>③ $c - e - f = 0$</td></tr> <tr><td>④ $2 \cdot b + 2 \cdot d = 1$</td></tr> <tr><td>⑤ $4 \cdot b - 2 \cdot c - f = 0$</td></tr> <tr><td>⑥ $4 \cdot d - 8 \cdot e + f = 0$</td></tr> </table>	① $a - b - c = 0$	② $a - d - e = 0$	③ $c - e - f = 0$	④ $2 \cdot b + 2 \cdot d = 1$	⑤ $4 \cdot b - 2 \cdot c - f = 0$	⑥ $4 \cdot d - 8 \cdot e + f = 0$
① $a - b - c = 0$							
② $a - d - e = 0$							
③ $c - e - f = 0$							
④ $2 \cdot b + 2 \cdot d = 1$							
⑤ $4 \cdot b - 2 \cdot c - f = 0$							
⑥ $4 \cdot d - 8 \cdot e + f = 0$							

Hinweis:

Die Lösung wird mit Hilfe der Matrizenrechnung ermittelt. Hier die Matrix für den Lösungsansatz:

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1	a	-b	-c				=	0
2	a			-d	-e		=	0
3			c		-e	-f	=	0
4		2b		+2d			=	1
5		4b	-2c			-f	=	0
6				4d	-8e	+f	=	0

Durch Umstellen, Addition, Subtraktion, ... wird diese Matrix bis zur Lösung entwickelt:

Zeile	Variable						Ergebnis	
1	a						=	
2		b					=	
3			c				=	
4				d			=	
5					e		=	
6						f	=	

Matrixdarstellung der Knoten- und Maschengleichungen (komplett)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrixdarstellung wird bevorzugt zur Verwendung in Computerprogramm oder in Schaltungssimulatoren verwendet, da mit dem Gauß- und dem Gauß-Jordan-Algorithmus und der crammerschen Regel effiziente Lösungsverfahren existieren.

Wir lösen unser Gleichungssystem nach und nach:

Gleichungssystem

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1	a	-b	-c				=	0
2	a			-d	-e		=	0
3			c		-e	-f	=	0
4		2b		+2d			=	1
5		4b	-2c			-f	=	0
6				4d	-8e	+f	=	0

Schritt 1:
 Gleichung Zeile (1) nach a umstellen und in Gleichung Zeile (2) einsetzen:

Zeile 1:

$$a - b - c = 0$$

$$a = b + c$$

Zeile 2 neu:

$$a - d - e = (b + c) - d - e$$

$$= b + c - d - e$$

Matrix nach Schritt 1

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1	a	-b	-c				=	0
2							=	
3			c		-e	-f	=	0
4		2b		+2d			=	1
5		4b	-2c			-f	=	0
6				4d	-8e	+f	=	0

Schritt 2:
 Zeile 1 neu = Gleichung Zeile (1) + Gleichung Zeile (2)

Matrix nach Schritt 2

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1							=	
2		b	+c	-d	-e		=	0
3			c		-e	-f	=	0
4		2b		+2d			=	1
5		4b	-2c			-f	=	0
6				4d	-8e	+f	=	0

Schritt 3:
 Zeile 4 neu = Gleichung Zeile (4) - 2 * Gleichung Zeile (2)

Matrix nach Schritt 3

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1	a			-d	-e		=	0
2		b	+c	-d	-e		=	0
3			c		-e	-f	=	0
4							=	
5		4b	-2c			-f	=	0
6				4d	-8e	+f	=	0

Schritt 4:

Zeile 5 neu = Gleichung Zeile (5) – 4 * Gleichung Zeile (2)

$$4b - 2c - f - 4 \cdot (b + c - d - e) = 0 - 4 \cdot 0$$

$$4b - 2c - f - 4b - 4c + 4d + 4e = 0$$

$$-6c + 4d + 4e - f = 0$$

Matrix nach Schritt 4

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1	a			-d	-e		=	0
2		b	+c	-d	-e		=	0
3			c		-e	-f	=	0
4			-2c	+4d	+2e		=	1
5							=	
6				4d	-8e	+f	=	0

Schritt 5:

Gleichung Zeile (3) nach c umstellen und in Gleichung Zeile (2) einsetzen

Zeile 3:

$$c - e - f = 0$$

$$c = e + f$$

Zeile 2 neu:

Matrix nach Schritt 5

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1	a			-d	-e		=	0
2							=	
3			c		-e	-f	=	0
4			-2c	+4d	+2e		=	1
5			-6c	+4d	+4e	-f	=	0
6				4d	-8e	+f	=	0

Schritt 6:

Zeile 4 neu = Gleichung Zeile (4) + 2 * Gleichung Zeile (3)

$$(-2c + 4d + 2e) + 2 \cdot (c - e - f) = 1 - 2 \cdot 0$$

$$-2c + 4d + 2e + 2c - 2e - 2f = 1 \Rightarrow 4d - 2f = 1$$

Matrix nach Schritt 6

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1	a			-d	-e		=	0
2		b		-d		+f	=	0
3			c		-e	-f	=	0
4							=	
5			-6c	+4d	+4e	-f	=	0
6				4d	-8e	+f	=	0

Schritt 7:
 Zeile 5 neu = Gleichung Zeile (5) + 6 * Gleichung Zeile (3)

Matrix nach Schritt 7

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1	a			-d	-e		=	0
2		b		-d		+f	=	0
3			c		-e	-f	=	0
4				4d		-2f	=	1
5							=	
6				4d	-8e	+f	=	0

Schritt 8:
 Zeile 1 neu = 4 * Gleichung Zeile (1) + Gleichung Zeile (4)
 $4 \cdot (a - d - e) + (4d - 2f) = 4 \cdot 0 + 1$
 $4a - 4d - 4e + 4d - 2f = 1$
 $4a - 4e - 2f = 1$

Matrix nach Schritt 8

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1							=	
2		b		-d		+f	=	0
3			c		-e	-f	=	0
4				4d		-2f	=	1
5				4d	-2e	-7f	=	0
6				4d	-8e	+f	=	0

Schritt 9:
 Zeile 2 neu = 4 * Gleichung Zeile (2) + Gleichung Zeile (4)

Matrix nach Schritt 9

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1	4a				-4e	-2f	=	1
2							=	
3			c		-e	-f	=	0
4				4d		-2f	=	1
5				4d	-2e	-7f	=	0
6				4d	-8e	+f	=	0

Schritt 10:

Zeile 5 neu = Gleichung Zeile (5) – Gleichung Zeile (4)

$$(4d - 2e - 7f) - (4d - 2f) = 0 - 1$$

$$4d - 2e - 7f - 4d + 2f = -1$$

$$-2e - 5f = -1$$

Matrix nach Schritt 10

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1	4a				-4e	-2f	=	1
2		4b				+2f	=	1
3			c		-e	-f	=	0
4				4d		-2f	=	1
5							=	
6				4d	-8e	+f	=	0

Schritt 11:

Zeile 6 neu = Gleichung Zeile (6) – Gleichung Zeile (4)

Matrix nach Schritt 11

Zeile	Variable						Ergebnis	
1	4a				-4e	-2f	=	1
2		4b				+2f	=	1
3			c		-e	-f	=	0
4				4d		-2f	=	1
5					-2e	-5f	=	-1
6							=	

Schritt 12:

Zeile 1 neu = Gleichung Zeile (1) – 2 * Gleichung Zeile (5)

Matrix nach Schritt 12

Zeile	Variable						Ergebnis	
1							=	
2		4b				+2f	=	1
3			c		-e	-f	=	0
4				4d		-2f	=	1
5					-2e	-5f	=	-1
6					-8e	+3f	=	-1

Schritt 13:
 Zeile 3 neu = 2 * Gleichung Zeile (3) – Gleichung Zeile (5)
 $2 \cdot (c - e - f) - (-2e - 5f) = 2 \cdot 0 - (-1)$
 $2c - 2e - 2f + 2e + 5f = 1$
 $2c + 3f = 1$

Matrix nach Schritt 13

Zeile	Variable						Ergebnis	
1	4a					+8f	=	3
2		4b				+2f	=	1
3							=	
4				4d		-2f	=	1
5					-2e	-5f	=	-1
6					-8e	+3f	=	-1

Schritt 14:
 Zeile 6 neu = Gleichung Zeile (6) – 4 * Gleichung Zeile (5)

Matrix nach Schritt 14

Zeile	Variable						Ergebnis	
1	4a					+8f	=	3
2		4b				+2f	=	1
3			2c			+3f	=	1
4				4d		-2f	=	1
5					-2e	-5f	=	-1
6							=	

Schritt 15:
 Zeile 1 neu = 23 * Gleichung Zeile (1) – 8 * Gleichung Zeile (6)

Matrix nach Schritt 15

Zeile	Variable						Ergebnis	
1							=	
2		4b				+2f	=	1
3			2c			+3f	=	1
4				4d		-2f	=	1
5					-2e	-5f	=	-1
6						23f	=	3

Schritt 16:

Zeile 6 neu = Gleichung Zeile (6) / 23

$$23f = 3$$

$$f = \frac{3}{23}$$

Diesen Wert für f in die Gleichungen Zeile 1 ... 5 übernehmen

Matrix nach Schritt 16

Zeile	Variable						Ergebnis	
1	92a						=	45
2		4b					=	1
3			2c				=	1
4				4d			=	1
5					-2e		=	-1
6						f	=	

Schritt 17:

Alle Gleichungen nach a, b, ... f umstellen und Ergebnis berechnen

Matrix nach Schritt 17

Zeile	Variable						Ergebnis	
1	a						=	
2		b					=	
3			c				=	
4				d			=	
5					e		=	
6						f	=	3/23