

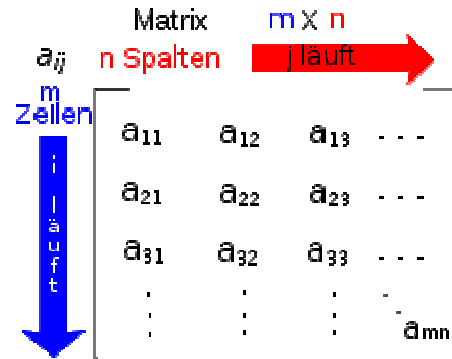
Lösen linearer Gleichungssysteme mit Hilfe der Matrizenrechnung

<http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/gleichungssysteme.htm>

In der Mathematik versteht man unter einer **Matrix** (Plural: *Matrizen*) eine rechteckige Anordnung (Tabelle) von Elementen bzw. mathematischen Objekten, mit denen man in bestimmter Weise rechnen kann (z. B. Matrix-Addition, Matrix-Multiplikation).

Die Bezeichnung „Matrix“ wurde 1850 von James Joseph Sylvester eingeführt.

Eine Anordnung, wie in nebenstehender Abbildung, von $m \cdot n$ Elementen a_{ij} erfolgt in m Zeilen und n Spalten.



| | | | | | | | |
|---|---|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| <p>Aufgabe: Brückenschaltung – Lösen des Gleichungssystems</p> | <table border="1"> <tr><td>① $a - b - c = 0$</td></tr> <tr><td>② $a - d - e = 0$</td></tr> <tr><td>③ $c - e - f = 0$</td></tr> <tr><td>④ $2 \cdot b + 2 \cdot d = 1$</td></tr> <tr><td>⑤ $4 \cdot b - 2 \cdot c - f = 0$</td></tr> <tr><td>⑥ $4 \cdot d - 8 \cdot e + f = 0$</td></tr> </table> | ① $a - b - c = 0$ | ② $a - d - e = 0$ | ③ $c - e - f = 0$ | ④ $2 \cdot b + 2 \cdot d = 1$ | ⑤ $4 \cdot b - 2 \cdot c - f = 0$ | ⑥ $4 \cdot d - 8 \cdot e + f = 0$ |
| ① $a - b - c = 0$ | | | | | | | |
| ② $a - d - e = 0$ | | | | | | | |
| ③ $c - e - f = 0$ | | | | | | | |
| ④ $2 \cdot b + 2 \cdot d = 1$ | | | | | | | |
| ⑤ $4 \cdot b - 2 \cdot c - f = 0$ | | | | | | | |
| ⑥ $4 \cdot d - 8 \cdot e + f = 0$ | | | | | | | |

Hinweis:

Die Lösung wird mit Hilfe der Matrizenrechnung ermittelt. Hier die Matrix für den Lösungsansatz:

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|----|-----|-----|-----|----|-----------|---|
| 1 | a | -b | -c | | | | = | 0 |
| 2 | a | | | -d | -e | | = | 0 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | 2b | | +2d | | | = | 1 |
| 5 | | 4b | -2c | | | -f | = | 0 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Durch Umstellen, Addition, Subtraktion, ... wird diese Matrix bis zur Lösung entwickelt:

| Zeile | Variable | | | | | | Ergebnis | |
|-------|----------|---|---|---|---|---|----------|--|
| 1 | a | | | | | | = | |
| 2 | | b | | | | | = | |
| 3 | | | c | | | | = | |
| 4 | | | | d | | | = | |
| 5 | | | | | e | | = | |
| 6 | | | | | | f | = | |

Matrixdarstellung der Knoten- und Maschengleichungen (komplett)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrixdarstellung wird bevorzugt zur Verwendung in Computerprogrammen oder in Schaltungssimulatoren verwendet, da mit dem Gauß- und dem Gauß-Jordan-Algorithmus und der Cramerschen Regel effiziente Lösungsverfahren existieren.

Wir lösen unser Gleichungssystem mit Hilfe des **Gauß'schen Eliminationsverfahren**:

Gleichungssystem

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|----|-----|-----|-----|----|-----------|---|
| 1 | a | -b | -c | | | | = | 0 |
| 2 | a | | | -d | -e | | = | 0 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | 2b | | +2d | | | = | 1 |
| 5 | | 4b | -2c | | | -f | = | 0 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Schritt 1:
 Gleichung Zeile (1) nach a umstellen und in Gleichung Zeile (2) einsetzen:

Zeile 1:

$$a - b - c = 0$$

$$a = b + c$$

Zeile 2 neu:

$$\begin{aligned} a - d - e &= (b + c) - d - e \\ &= b + c - d - e = 0 \end{aligned}$$

Matrix nach Schritt 1

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|----|-----|-----|-----|----|-----------|---|
| 1 | a | -b | -c | | | | = | 0 |
| 2 | | b | +c | -d | -e | | = | 0 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | 2b | | +2d | | | = | 1 |
| 5 | | 4b | -2c | | | -f | = | 0 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Schritt 2:
 Zeile 1 neu = Gleichung Zeile (1) + Gleichung Zeile (2)

$$\begin{aligned} (a - b - c) + (b + c - d - e) &= 0 + 0 \\ a - b - c + b + c - d - e &= 0 \\ a - d - e &= 0 \end{aligned}$$

Matrix nah Schritt 2

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|----|-----|-----|-----|----|-----------|---|
| 1 | a | | | -d | -e | | = | 0 |
| 2 | | b | +c | -d | -e | | = | 0 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | 2b | | +2d | | | = | 1 |
| 5 | | 4b | -2c | | | -f | = | 0 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Schritt 3:
 Zeile 4 neu = Gleichung Zeile (4) - 2 * Gleichung Zeile (2)

$$\begin{aligned} 2b + 2d - 2 \cdot (b + c - d - e) &= 1 - 2 \cdot 0 \\ 2b + 2d - 2b - 2c + 2d + 2e &= 1 \\ -2c + 4d + 2e &= 1 \end{aligned}$$

Matrix nach Schritt 3

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|----|-----|-----|-----|----|-----------|---|
| 1 | a | | | -d | -e | | = | 0 |
| 2 | | b | +c | -d | -e | | = | 0 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | | -2c | +4d | +2e | | = | 1 |
| 5 | | 4b | -2c | | | -f | = | 0 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Schritt 4:
 Zeile 5 neu = Gleichung Zeile (5) – 4 * Gleichung Zeile (2)
 $4b - 2c - f - 4 \cdot (b + c - d - e) = 0 - 4 \cdot 0$
 $4b - 2c - f - 4b - 4c + 4d + 4e = 0$
 $-6c + 4d + 4e - f = 0$

Matrix nach Schritt 4

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|---|-----|-----|-----|----|-----------|---|
| 1 | a | | | -d | -e | | = | 0 |
| 2 | | b | +c | -d | -e | | = | 0 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | | -2c | +4d | +2e | | = | 1 |
| 5 | | | -6c | +4d | +4e | -f | = | 0 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Schritt 5:
 Gleichung Zeile (3) nach c umstellen und in Gleichung Zeile (2) einsetzen
 Zeile 3:
 $c - e - f = 0$
 $c = e + f$
 Zeile 2 neu:
 $b + c - d - e = 0$
 $b + (e + f) - d - e = 0$
 $b + e + f - d - e = 0$
 $b - d + f = 0$

Matrix nach Schritt 5

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|---|-----|-----|-----|----|-----------|---|
| 1 | a | | | -d | -e | | = | 0 |
| 2 | | b | | -d | | +f | = | 0 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | | -2c | +4d | +2e | | = | 1 |
| 5 | | | -6c | +4d | +4e | -f | = | 0 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Schritt 6:
 Zeile 4 neu = Gleichung Zeile (4) + 2 * Gleichung Zeile (3)
 $(-2c + 4d + 2e) + 2 \cdot (c - e - f) = 1 + 2 \cdot 0$
 $-2c + 4d + 2e + 2c - 2e - 2f = 1 \Rightarrow 4d - 2f = 1$

Matrix nach Schritt 6

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|---|-----|-----|-----|-----|-----------|---|
| 1 | a | | | -d | -e | | = | 0 |
| 2 | | b | | -d | | +f | = | 0 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | | | 4d | | -2f | = | 1 |
| 5 | | | -6c | +4d | +4e | -f | = | 0 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Schritt 7:

Zeile 5 neu = Gleichung Zeile (5) + 6 * Gleichung Zeile (3)

$$(-6c + 4d + 4e - f) + 6 \cdot (c - e - f) = 0 + 6 \cdot 0$$

$$-6c + 4d + 4e - f + 6c - 6e - 6f = 0$$

$$4d - 2e - 7f = 0$$

Matrix nach Schritt 7

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|---|---|----|-----|-----|-----------|---|
| 1 | a | | | -d | -e | | = | 0 |
| 2 | | b | | -d | | +f | = | 0 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | | | 4d | | -2f | = | 1 |
| 5 | | | | 4d | -2e | -7f | = | 0 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Schritt 8:

Zeile 1 neu = 4 * Gleichung Zeile (1) + Gleichung Zeile (4)

$$4 \cdot (a - d - e) + (4d - 2f) = 4 \cdot 0 + 1$$

$$4a - 4d - 4e + 4d - 2f = 1$$

$$4a - 4e - 2f = 1$$

Matrix nach Schritt 8

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|---|---|----|-----|-----|-----------|---|
| 1 | 4a | | | | -4e | -4f | = | 1 |
| 2 | | b | | -d | | +f | = | 0 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | | | 4d | | -2f | = | 1 |
| 5 | | | | 4d | -2e | -7f | = | 0 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Schritt 9:

Zeile 2 neu = 4 * Gleichung Zeile (2) + Gleichung Zeile (4)

$$4 \cdot (b - d + f) + (4d - 2f) = 4 \cdot 0 + 1$$

$$4b - 4d + 4f + 4d - 2f = 1$$

$$4b + 2f = 1$$

Matrix nach Schritt 9

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|----|---|----|-----|-----|-----------|---|
| 1 | 4a | | | | -4e | -2f | = | 1 |
| 2 | | 4b | | | | +2f | = | 1 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | | | 4d | | -2f | = | 1 |
| 5 | | | | 4d | -2e | -7f | = | 0 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Schritt 10:

Zeile 5 neu = Gleichung Zeile (5) – Gleichung Zeile (4)

$$(4d - 2e - 7f) - (4d - 2f) = 0 - 1$$

$$4d - 2e - 7f - 4d + 2f = -1$$

$$-2e - 5f = -1$$

Matrix nach Schritt 10

| Zeile | Koeffizient * Variable | | | | | | Konstante | |
|-------|------------------------|----|---|----|-----|-----|-----------|----|
| 1 | 4a | | | | -4e | -2f | = | 1 |
| 2 | | 4b | | | | +2f | = | 1 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | | | 4d | | -2f | = | 1 |
| 5 | | | | | -2e | -5f | = | -1 |
| 6 | | | | 4d | -8e | +f | = | 0 |

Schritt 11:

Zeile 6 neu = Gleichung Zeile (6) – Gleichung Zeile (4)

$$(4d - 8e + f) - (4d - 2f) = 0 - 1$$

$$4d - 8e + f - 4d + 2f = -1$$

$$-8e + 3f = -1$$

Matrix nach Schritt 11

| Zeile | Variable | | | | | | Ergebnis | |
|-------|----------|----|---|----|-----|-----|----------|----|
| 1 | 4a | | | | -4e | -2f | = | 1 |
| 2 | | 4b | | | | +2f | = | 1 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | | | 4d | | -2f | = | 1 |
| 5 | | | | | -2e | -5f | = | -1 |
| 6 | | | | | -8e | +3f | = | -1 |

Schritt 12:

Zeile 1 neu = Gleichung Zeile (1) – 2 * Gleichung Zeile (5)

$$(4a - 4e - 2f) - 2 \cdot (-2e - 5f) = 1 - 2 \cdot (-1)$$

$$4a - 4e - 2f + 4e + 10f = 3$$

$$4a + 8f = 3$$

Matrix nach Schritt 12

| Zeile | Variable | | | | | | Ergebnis | |
|-------|----------|----|---|----|-----|-----|----------|----|
| 1 | 4a | | | | | 8f | = | 3 |
| 2 | | 4b | | | | +2f | = | 1 |
| 3 | | | c | | -e | -f | = | 0 |
| 4 | | | | 4d | | -2f | = | 1 |
| 5 | | | | | -2e | -5f | = | -1 |
| 6 | | | | | -8e | +3f | = | -1 |

Schritt 13:

Zeile 3 neu = 2 * Gleichung Zeile (3) – Gleichung Zeile (5)

$$2 \cdot (c - e - f) - (-2e - 5f) = 2 \cdot 0 - (-1)$$

$$2c - 2e - 2f + 2e + 5f = 1$$

$$2c + 3f = 1$$

Matrix nach Schritt 13

| Zeile | Variable | | | | | | Ergebnis | |
|-------|----------|----|----|----|-----|-----|----------|----|
| 1 | 4a | | | | | +8f | = | 3 |
| 2 | | 4b | | | | +2f | = | 1 |
| 3 | | | 2c | | | +3f | = | 1 |
| 4 | | | | 4d | | -2f | = | 1 |
| 5 | | | | | -2e | -5f | = | -1 |
| 6 | | | | | -8e | +3f | = | -1 |

Schritt 14:

Zeile 6 neu = Gleichung Zeile (6) – 4 * Gleichung Zeile (5)

$$(-8e + 3f) - 4 \cdot (-2e - 5f) = -1 - 4 \cdot (-1)$$

$$-8e + 3f + 8e + 20f = 3$$

$$23f = 3$$

Matrix nach Schritt 14

| Zeile | Variable | | | | | | Ergebnis | |
|-------|----------|----|----|----|-----|-----|----------|----|
| 1 | 4a | | | | | +8f | = | 3 |
| 2 | | 4b | | | | +2f | = | 1 |
| 3 | | | 2c | | | +3f | = | 1 |
| 4 | | | | 4d | | -2f | = | 1 |
| 5 | | | | | -2e | -5f | = | -1 |
| 6 | | | | | | 23f | = | 3 |

Schritt 15:

Zeile 1 neu = 23 * Gleichung Zeile (1) – 8 * Gleichung Zeile (6)

$$23 \cdot (4a - 8f) - 8 \cdot (23f) = 23 \cdot 3 - 8 \cdot 3$$

$$92a - 184f - 184f = 69 - 24$$

$$92a = 45$$

Matrix nach Schritt 15

| Zeile | Variable | | | | | | Ergebnis | |
|-------|----------|----|----|----|-----|-----|----------|----|
| 1 | 92a | | | | | | = | 45 |
| 2 | | 4b | | | | +2f | = | 1 |
| 3 | | | 2c | | | +3f | = | 1 |
| 4 | | | | 4d | | -2f | = | 1 |
| 5 | | | | | -2e | -5f | = | -1 |
| 6 | | | | | | 23f | = | 3 |

Schritt 16:

Zeile 6 neu = Gleichung Zeile (6) / 23

$$23f = 3$$

$$f = \frac{3}{23}$$

Diesen Wert für f in die Gleichungen Zeile 1 ... 5 übernehmen

Matrix nach Schritt 16

| Zeile | Variable | | | | | | Ergebnis | |
|-------|----------|----|----|----|-----|---------|----------|------|
| 1 | 92a | | | | | | = | 45 |
| 2 | | 4b | | | | + 6/23 | = | 1 |
| 3 | | | 2c | | | + 9/23 | = | 1 |
| 4 | | | | 4d | | - 6/23 | = | 1 |
| 5 | | | | | -2e | - 15/23 | = | -1 |
| 6 | | | | | | f | = | 3/23 |

Schritt 17:

Alle Gleichungen nach a, b, ... f umstellen und Ergebnis berechnen

Matrix nach Schritt 17

| Zeile | Variable | | | | | Ergebnis | | |
|-------|----------|---|---|---|---|----------|---|--|
| 1 | a | | | | | = | $\frac{45}{92} = 0,48913\dots$ | |
| 2 | | b | | | | = | $1 - \frac{6}{23} = \frac{23}{23} - \frac{6}{23} = \frac{17}{23} = \frac{17}{92} = 0,18478\dots$ | |
| 3 | | | c | | | = | $1 - \frac{9}{23} = \frac{23}{23} - \frac{9}{23} = \frac{14}{23} = \frac{7}{23} = 0,30434\dots$ | |
| 4 | | | | d | | = | $1 + \frac{6}{23} = \frac{23}{23} + \frac{6}{23} = \frac{29}{23} = \frac{29}{92} = 0,31521\dots$ | |
| 5 | | | | | e | = | $-1 + \frac{15}{23} = -\frac{23}{23} + \frac{15}{23} = -\frac{8}{23} = \frac{4}{23} = 0,17391\dots$ | |
| 6 | | | | | f | = | $\frac{3}{23} = 0,13043\dots$ | |