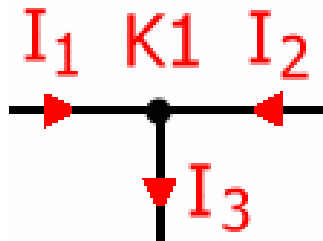


3. Grundlagen der Elektrotechnik¹

3.1 Parallelschaltung und Knotenpunktregel (1. kirchhoff'sche Regel)

http://www.sn.schule.de/~ms161/virtuelle_schule/3de/Kapitel_05_Knotenpunktregel/kapitel_05.htm



$$\sum I = 0$$

$$\sum I_{zu} = \sum I_{ab}$$

$$I_1 + I_2 = I_3$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

In einem Knotenpunkt ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der wegfließenden Ströme.

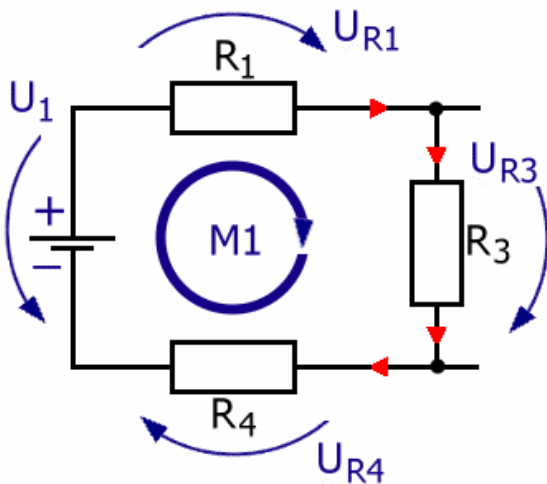
Für das nebenstehende Beispiel ergibt sich:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Daraus ergibt sich die allgemeingültige Formel: Die Summe aller vorzeichenbehafteten Ströme in einem Knotenpunkt ist gleich Null.

3.2 Reihenschaltung und Maschenregel (2. kirchhoff'sche Regel)

http://www.sn.schule.de/~ms161/virtuelle_schule/3de/Kapitel_06_Maschenregel/kapitel_06.htm



$$\sum U = 0$$

$$\sum U_{rechts} = \sum U_{links}$$

$$U_{R1} + U_{R3} + U_{R4} = U_1$$

$$U_{R1} + U_{R3} + U_{R4} - U_1 = 0$$

In einer Masche ist die Summe der positiven Spannungen gleich der Summe der negativen Spannungen.

Eine Spannung ist positiv, wenn die Umlaufrichtung der Masche in die gleiche Richtung verläuft wie der jeweilige Spannungszählpfeil (also bei U_{R1} , U_{R3} und U_{R4}).

Eine Spannung ist negativ, wenn die Umlaufrichtung der Masche entgegen den jeweiligen Spannungszählpfeilen verläuft (also bei U_1).

Für das nebenstehende Beispiel ergibt sich:

$$U_{R1} + U_{R3} + U_{R4} = U_1$$

daraus ergibt sich die allgemeingültige Formel:

In einer Masche ist die Summe der Spannungen Null.

¹ Bastian, Peter u. a.: Fachkunde Elektrotechnik; Haan-Gruiten: VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL; 2006, 25. Aufl., ISBN 3-8085-3159-2; S. 47 ff



Gustav Robert Kirchhoff (*12. März 1824 in Königsberg/Preußen; †17. Oktober 1887 in Berlin) war ein deutscher Physiker, der sich insbesondere um die Erforschung der Elektrizität verdient gemacht hat.

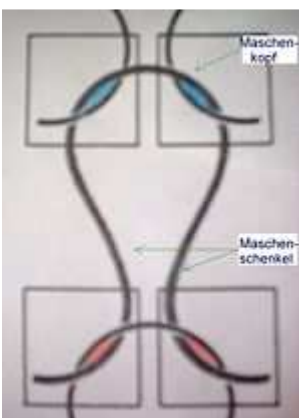
Kirchhoff ist bekannt für seine Regeln der elektrischen Stromkreise zur Beschreibung der Abhängigkeit von elektrischer Spannung, elektrischem Strom und elektrischem Widerstand, die er 1845 fand. Die sogenannten Kirchhoffschen Regeln sind fundamental für Aufbau und Analyse elektrischer Schaltungen sowie die Elektrotechnik allgemein.

Kirchhoff hat, zusammen mit Robert Wilhelm Bunsen, mittels Spektralanalyse das Caesium und das Rubidium entdeckt. Durch ihre Studien wurde es zudem möglich, die Fraunhoferlinie zu erklären und somit eine der wesentlichen Grundlagen der modernen Astronomie zu schaffen.

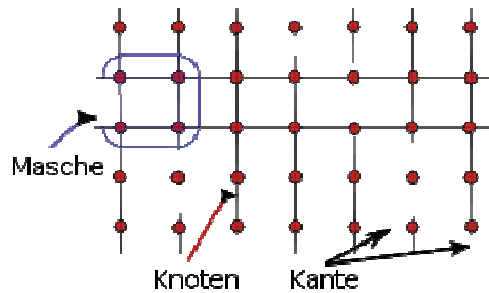
Das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz besagt: Materie gleich welcher Art sendet bei Erhitzung eine kontinuierliche Strahlung aus, die je nach der Temperatur unsichtbar oder sichtbar ist. Diese Strahlung nennt man Temperatur- oder Wärmestrahlung. An eine ausgedehnte experimentelle Untersuchung dieses Gesetzes war zunächst nicht zu denken, da die Mittel für die Messung hoher Temperaturen und kleiner Strahlungsenergie fehlten. Die weitreichende Bedeutung wurde jedoch sofort erkannt. Das daraus entwickelte Konzept des Schwarzen Körpers führte schließlich zur Quantentheorie.

Kirchhoff beschäftigte sich auch mit der Plattentheorie; der Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, die Kirchhoff-Love-Hypothese und die sogenannten Kirchhoff-Platten erinnern daran.

Nach Gustav Robert Kirchhoff ist das „Kirchhoff-Institut für Physik“ (KIP) der Universität Heidelberg benannt.



Eine **Masche** ist eine Faden-Schlinge, die in andere Fadenschlingen eingehängt wird, wodurch Strick- oder Wirkwaren entstehen. Maschen sind miteinander durch vier Bindungsstellen verbunden (s. Skizze links, blau und rot).



Als **Netzwerke** werden Systeme bezeichnet, deren zugrundeliegende Struktur sich mathematisch als Graph modellieren lässt und die über Mechanismen zu ihrer Organisation verfügen. Der Graph besteht aus einer Menge von Elementen (Knoten), die mittels Verbindungen (Kanten) miteinander verbunden sind. Ein geschlossener Zug aus Kanten und Knoten heißt *Masche*.

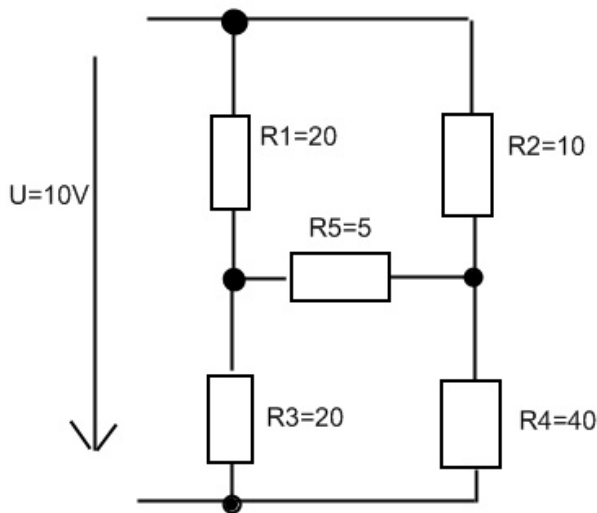
Dass der Großteil der Knoten zu einer oder mehreren Maschen gehört, ist das eigentliche Kennzeichen eines Netzwerks gegenüber anderen Typen von Strukturen.

Netzwerke werden auf einer abstrakten Ebene in der Netzwerkforschung untersucht und in der Praxis in den jeweiligen Anwendungsgebieten, aus denen die konkreten Netze stammen.

Beispiel:

Gemischte Schaltung - Brückenschaltung²

Berechnen Sie den Gesamtwiderstand, die Teilströme und Teilspannungen für die abgebildete Schaltung mit Hilfe der Maschen- und Knotenpunktregeln.



Lösungshilfe:

Hier muss man entweder

1. mit Stern-/Dreieckumwandlung arbeiten oder
2. die Maschen- und Knotenpunktgleichungen aufstellen und lösen
(gutes Beispiel: <http://www.uni-protokolle.de/foren/view/151817,0.html>) oder
3. aus U_1 mit R_2, R_4 einerseits und U_1 mit R_1, R_3 andererseits je eine Ersatzspannungsquelle bilden, die dann auf R_5 arbeiten.

Aufgabe:

Bestimmen Sie für die Schaltung

1. die Teilströme I_1, I_2, \dots, I_5 und den Gesamtstrom I_0 ,
2. die Teilspannungen U_1, U_2, \dots, U_5 an den Widerständen R_1, R_2, \dots, R_5 ,
3. den Gesamtwiderstand R_{ges}

Zur Lösung wählen Sie die Knotenpunkt- und Maschengleichungen (1. und 2. kirchhoff'sche Gesetz).

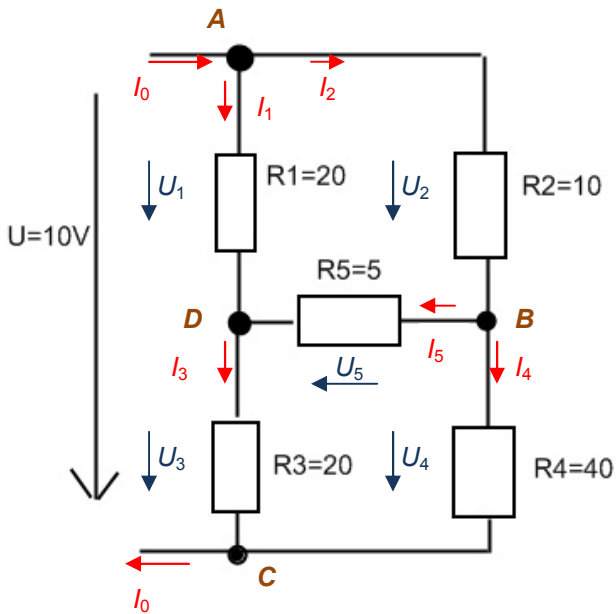
Für die Lösung des Gleichungssystems wählen Sie im Internet folgende Seite:

Rechner zum Lösen linearer Gleichungssysteme:

<http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/gleichungssysteme.htm>

² Eine **Brückenschaltung** – auch **H-Schaltung**, **H-Brücke** oder **Vollbrücke** genannt – ist eine elektrische Schaltung, bei der in der Grundform fünf Zweipole in Form des Großbuchstabens H zusammenschaltet sind. Die Querverbindung heißt *Brückenweig*.

Lösung : Anwendung Maschen- und Knotenpunktgleichungen ($U = U_0$)



Knotenpunktgleichungen

Knotenpunkt	Knotenpunktgleichung
A	$I_0 = I_1 + I_2$
B	$I_2 = I_4 + I_5$
C	$I_0 = I_3 + I_4$
D	$I_3 = I_1 + I_5$

Gleichungen mit den Maschenregeln ($U = U_0$)

Masche	Masche aus	Maschengleichung
M1	U0-R1-R3	$U_0 = U_1 + U_3$
M2	U0-R2-R4	$U_0 = U_2 + U_4$
M3	U0-R1-R5-R4	$U_0 = U_1 - U_5 + U_4$
M4	U0-R2-R5-R2	$U_0 = U_2 + U_5 + U_3$
M5	R2-R5-R1	$U_1 = U_2 + U_5$
M6	R5-R4-R3	$U_4 = U_3 + U_5$

Zusätzlich gilt für die einzelnen Widerstände der Zusammenhang

$$\{ U_n = R_n \cdot I_n \mid n \in N \wedge n \in [0, 5] \}.$$

Die Knotenpunktgleichungen und die Gleichungen der Maschenregeln ergeben mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes folgendes Gleichungssystem:

Hinweis:

Spannungen werden in Volt, Stromstärken in Ampere und Widerstände in Ohm eingesetzt bzw. berechnet.

Gleichungssystem:

Gleichung		Substitution	Wir rechnen mit	
Knotenpunktgleichungen	① $I_0 = I_1 + I_2$	$I_0 = a$ $I_1 = b$ $I_2 = c$ $I_3 = d$ $I_4 = e$ $I_5 = f$	$a = b + c$	
	② $I_2 = I_4 + I_5$		$c = e + f$	
	③ $I_0 = I_3 + I_4$		$a = d + e$	
	④ $I_3 = I_1 + I_5$		$d = a + f$	
Maschengleichungen	⑤ $U_0 = U_1 + U_3$ $= R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3$ $10_V = 20_{\Omega} \cdot I_{1A} + 20_{\Omega} \cdot I_{3A}$			$10 = 20 \cdot b + 20 \cdot d$
	⑥ $U_0 = U_2 + U_4$ $10_V = 10_{\Omega} \cdot I_{2A} + 40_{\Omega} \cdot I_{4A}$			$10 = 10 \cdot c + 40 \cdot e$
	⑦ $U_0 = U_1 - U_5 + U_4$ $10_V = 20_{\Omega} \cdot I_{1A} - 5_{\Omega} \cdot I_{5A} + 40_{\Omega} \cdot I_{4A}$			$10 = 20 \cdot b - 5 \cdot f + 40 \cdot e$
	⑧ $U_0 = U_2 + U_5 + U_3$ $10_V = 10_{\Omega} \cdot I_{2A} + 5_{\Omega} \cdot I_{5A} + 20_{\Omega} \cdot I_{3A}$			$10 = 10 \cdot c + 5 \cdot f + 20 \cdot d$
	⑨ $U_1 = U_2 + U_5$ $20_{\Omega} \cdot I_{1A} = 10_{\Omega} \cdot I_{2A} + 5_{\Omega} \cdot I_{5A}$			$20 \cdot b = 10 \cdot c + 5 \cdot f$
	⑩ $U_4 = U_3 + U_5$ $40_{\Omega} \cdot I_4 = 20_{\Omega} \cdot I_{3A} + 5_{\Omega} \cdot I_{5A}$			$40 \cdot e = 20 \cdot d + 5 \cdot f$

In unserer Brückenschaltung haben wir die 6 Unbekannten I_0, I_1, \dots, I_5 bzw. a, b, \dots, f . Zur Lösung benötigen wir 6 Gleichungen, die diese Unbekannten enthalten.

Zur Lösung wählen wir 6 Gleichungen, die so umgeformt und sortiert werden, dass die Variablen alphabetisch links und die Konstanten rechts stehen:

①	$a = b + c$	\Rightarrow	$a - b - c = 0$	\Rightarrow	$a - b - c = 0$
③	$a = d + e$		$a - d - e = 0$		$a - d - e = 0$
②	$c = e + f$		$c - e - f = 0$		$c - e - f = 0$
⑤	$10 = 20 \cdot b + 20 \cdot d$		$20 \cdot b + 20 \cdot d = 10$		$2 \cdot b + 2 \cdot d = 1$
⑨	$20 \cdot b = 10 \cdot c + 5 \cdot f$		$20 \cdot b - 10 \cdot c - 5 \cdot f = 0$		$4 \cdot b - 2 \cdot c - f = 0$
⑩	$40 \cdot e = 20 \cdot d + 5 \cdot f$		$20 \cdot d - 40 \cdot e + 5 \cdot f = 0$		$4 \cdot d - 8 \cdot e + f = 0$

Rechner zum Lösen linearer Gleichungssysteme:

<http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/gleichungssysteme.htm>

Gleichungen (oder Koeffizientenmatrix) hier eingeben
Lösungen (werden berechnet)

```
a - b - c = 0
a - d - e = 0
c - e - f = 0
2b + 2d = 1
4b - 2c - f = 0
4d - 8e + f = 0
```

```
a = 0,4891304348
b = 0,1847826087
c = 0,3043478261
d = 0,3152173913
e = 0,1739130435
f = 0,1304347826
```

Lösen des Gleichungssystems
Eingaben löschen
Ausgabe als Dezimalzahl

Hinweis:

Die Lösung wird mit Hilfe der Matrizenrechnung ermittelt. Hier die Matrix für den Lösungsansatz:

Zeile	Koeffizient * Variable						Konstante	
1	a	-b	-c				=	0
2	a			-d	-e		=	0
3			c		-e	-f	=	0
4		2b		+2d			=	1
5		4b	-2c			-f	=	0
6				4d	-8e	+f	=	0

Durch Umstellen, Addition, Subtraktion, ... wird diese Matrix bis zur Lösung entwickelt:

Zeile	Variable						Ergebnis	
1	a						=	
2		b					=	
3			c				=	
4				d			=	
5					e		=	
6						f	=	

Lösungen übernehmen, Teilspannungen und Gesamtwiderstand berechnen:

a = 0,4891...	$I_0 = 0,489 \text{ A}$		$U_0 = 10 \text{ V}$	$R_{\text{ges}} = 20,45 \ \Omega$
b = 0,1847...	$I_1 = 0,185 \text{ A}$	$R_1 = 20 \ \Omega$	$U_1 = 3,70 \text{ V}$	
c = 0,3043...	$I_2 = 0,304 \text{ A}$	$R_2 = 10 \ \Omega$	$U_2 = 3,04 \text{ V}$	
d = 0,3152...	$I_3 = 0,315 \text{ A}$	$R_3 = 20 \ \Omega$	$U_3 = 6,30 \text{ V}$	
e = 0,1739...	$I_4 = 0,174 \text{ A}$	$R_4 = 40 \ \Omega$	$U_4 = 6,96 \text{ V}$	
f = 0,1304...	$I_5 = 0,130 \text{ A}$	$R_5 = 5 \ \Omega$	$U_5 = 0,65 \text{ V}$	

Berechnung des Schaltungswiderstandes ohne Kirchhoff'sche Regeln

Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Br%C3%BCckenschaltung>

Schritt	Maßnahme	Ergebnis
1	Zuerst wird $R_5 = \infty$ angenommen, wodurch eine Unterbrechung entsteht:	$R'_\infty = (R_1 + R_3) \parallel (R_2 + R_4)$ $= (20 \Omega + 20 \Omega) \parallel (10 \Omega + 40 \Omega)$ $= (40 \Omega) \parallel (50 \Omega)$ $= \frac{40 \Omega \cdot 50 \Omega}{40 \Omega + 50 \Omega}$ $= 22,2222... \Omega$
2	Anschließend wird $R_5 = 0$ gesetzt und dadurch kurzgeschlossen:	$R'_0 = R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4$ $= 20 \Omega \parallel 10 \Omega + 20 \Omega \parallel 40 \Omega$ $= \frac{20 \Omega \cdot 10 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega} + \frac{20 \Omega \cdot 40 \Omega}{20 \Omega + 40 \Omega}$ $= 20 \Omega$
3	Nun ermittelt man den Widerstand aus Sicht von R_5 , wobei die Spannungsquelle unendlich gesetzt wird:	$R'_5 = (R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)$ $= (20 \Omega + 10 \Omega) \parallel (20 \Omega + 40 \Omega)$ $= (30 \Omega) \parallel (60 \Omega)$ $= \frac{30 \Omega \cdot 60 \Omega}{30 \Omega + 60 \Omega}$ $= 20 \Omega$
4	Die berechneten Werte kann man in die nebenstehende Gleichung einsetzen, die mit Hilfe der Kirchhoff'schen Regeln ermittelt werden kann:	$R_0 = \frac{R'_0}{1 + \frac{R_5}{R'_5}} + \frac{R'_\infty}{1 + \frac{R'_5}{R_5}}$ $= \frac{20 \Omega}{1 + \frac{5 \Omega}{20 \Omega}} + \frac{22,22 \Omega}{1 + \frac{20 \Omega}{5 \Omega}}$ $= 20,44 \Omega$